Devoir Vacances

Exercice 1

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1. a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \ln(n)$.

2. On considère la fonction ϕ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \phi_1(0) = 0 \\ \phi_1(x) = x(1 + \ln(x)) \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Montrer que ϕ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x \phi_n(t)\, dt$$

(On rappelle que ϕ_1 a été définie à la question 2).

a. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\phi_n(0)$?

b. Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \phi_n(x) = x^{\mathrm{n}}(a_n + b_n)\ln(x)).$$

On montrera que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$$

4. Calculer b_n.

5. Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n!\ a_n$

a. Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.

c. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

d. Montrer enfin que la série de terme général a_n est absolument convergente.

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x\ln(x) \text{ et } e_4(x) = x^2\ln(x)$$

On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0.$$

a. L'égalité précédente devant être vérifiée pour tout réel x strictement positif, montrer en choisissant une « bonne valeur » pour x que $a + b = 0$.

b. Etablir que :

On considère la fonction $f_1\ :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d$$

Justifier que $\forall x \in]1,+\infty[, f_1(x) = 0$.

En déduire par un calcul de limite que $d = 0$.

c. Etablir ensuite que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{a}{x} + b + c\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

En déduire par un raisonnement identique à celui du b) que $b = 0$.

d. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

2. a. Déduire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

b. Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

3. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = xf'(x)$.

a. Montrer que u est une application linéaire.

b. Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.

c. Soit f une fonction de E s'écrivant pour tout x :

$$f(x) = a_1e_1(x) + a_2e_2(x) + a_3e_3(x) + a_4e_4(x).$$

Ecrire $g(x)$ en fonction des réels a_1, a_2, a_3, a_4 et de $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ et $e_4(x)$.

d. En déduire que u est un endomorphisme de E.

4. a. Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

b. Montrer que u est un automorphisme de E.

Exercice 2

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P).

On suppose que X, Y et Z suivent la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$(c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \frac{1}{n}$$

1. Déterminer $(X + Y)(\Omega)$.

2. a. Justifier que $\forall k \in [\![2, n+1]\!], (X + Y = k) = \bigcup_{j=2}^{k}(X = j \cap Y = k - j)$

b. En déduire que : $\forall k \in [\![2, n+1]\!], P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$

c. Montrer que : $\forall k \in [\![n+2, 2n]\!], P(X + Y = k) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$.

2. a. On rappelle que si les variables X, Y et Z sont mutuellement indépendantes, alors les variables $(X + Y)$ et Z sont indépendantes.

$\forall k \in [\![2,2n]\!]$, calculer $P(X + Y = k \cap Z = k)$. (On considèrera deux cas différents).

b. Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que :

$$P(X+Y=Z)=\frac{n-1}{2n^2}$$

3. a. Montrer que la variable aléatoire $T=n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$.
b. Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?
c. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z=n+1)$.

Exercice 3

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x)=\ln(x)+2x+1$$

a. Etudier les variations de g et donner les limies de g en 0 et en $+\infty$.
b. En déduire qu'il existe un unique réel α élément de $]0,1/e[$ tel que $g(\alpha)=0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}, f(x,y)=x(\ln(x)+x+y^2)$$

a. Déterminer le seul point critique de f, c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
b. Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.
c. Montrer que $m=-\alpha(\alpha+1)$.

Exercice 4

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0,7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.
1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0,1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0,05.
a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB...)
On note $L_{1\ 1}$ la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

a. Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \;\; P(L_1 = k) = 0{,}3^k \times \; 0{,}7 + 0{,}7^k \times \; 0{,}3$$

b. Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

c. Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

d. Déterminer la loi du couple aléatoire $(L_1\,, L_2)$.

e. En déduire la loi de L_2.