Ecricome 2008 Correction

Exercice 1

On a

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On a

$$E=\{M(a,b)(a,b)\text{ réels}\}$$

1. On a $M(0,0)=O$, donc $E\neq\emptyset$.
   Soit $M(a,b)\in E$. On peut écrire
   $$M(a,b)=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   L'ensemble E apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   C'est donc le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par ces deux matrices.
2. Ces deux matrices forment évidemment une famille libre. En effet si α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Ce qui donne
   $$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha+2\,\beta & -\beta & -2\,\beta \\ 2\,\beta & \alpha-\beta & -4\,\beta \\ -\beta & \beta & \alpha+3\,\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Et donc $\beta=0$, puis $\alpha=0$.
   Ces deux matrices constituent donc une famille libre et génératrice de E. Elles forment donc une base de E et l'on a
   $$\dim(E)=2$$
3. On a
   $$A-I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est évidemment non inversible puisque les deux premières colonnes correspondent à des vecteurs colinéaires.
   La troisième colonne est également proportionnelle aux deux autres. Le rang de la matrice est donc égal à 1. On peut donc dire que 1 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 2, d'après le théorème du rang.

   On a
   $$A-2I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On peut vérifier par la méthode du pivot de Gauss que cette matrice n'est pas inversible.

En faisant $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{cases}$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est donc équivalente à une matrice triangulaire non inversible : elle n'est pas inversible et donc 2 est valeur propre de A.

Les deux premiers vecteurs colonnes de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc le rang de la matrice est 2 et donc la dimension du sous-espace propre qui est le noyau est 1.

On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à 1 et 2 est égale à 3, dimension de l'espace dans lequel on travaille. Les nombres 1 et 2 sont donc les deux seules valeurs propres et la matrice A est diagonalisable.

4. Il s'agit en fait de déterminer une base de vecteurs propres, le premier étant un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
   On impose en plus que pour ce vecteur la première composante soit 1.
   On cherche donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nul tel que $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   On en déduit :
$$\begin{pmatrix} -y - 2\,z \\ 2\,x - 3\,y - 4\,z \\ y + z - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ce qui donne le système $\begin{cases} -y - 2\,z = 0 \\ 2\,x - 3\,y - 4\,z = 0. \\ y + z - x = 0 \end{cases}$
   On peut procéder par substitution :
$$\begin{cases} y = -2\,z \\ 2\,x - 3(-2z) - 4\,z = 0 \\ -2z + z - x = 0 \end{cases}$$
   Système équivalent à :
$$\begin{cases} y = -2\,z \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$
   Les deux dernières équations sont identiques et l'on a donc comme système équivalent :
$$\begin{cases} y = -2\,z \\ x = -z \end{cases}$$
   On a donc
$$E_2 = \{(x, y, z) \backslash y = -2z \text{ et } x = -z\} = \{(-z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$
   En prenant $z = -1$, on a $(1,2,-1)$ comme vecteur propre associé à la valeur propre 2.

   Pour la valeur propre 1, il est plus facile de regarder les combinaisons linéaires des vecteurs colonnes. Si l'on nomme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et g_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice $A - I$, on a :

$$g_1(e_1) = -g_1(e_2)$$
$$g_1(e_3) = -2g_1(e_1)$$

On en déduit par les propriétés des applications linéaires que :

$$g_1(e_1 + e_2) = 0$$
$$g_1(2e_1 + e_3) = 0$$

Les vecteurs $e_1 + e_2$ et $2e_1 + e_3$ sont des vecteurs libres du noyau de g_1. Ce sont donc deux vecteurs propres non colinéaires du sous espace propre E_1.

La matrice P est donc égale à :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a par la méthode du pivot de Gauss

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et d'après les formules de changement de bases :

$$D = P^{-1}AP$$

5. On a vu que

$$M(a,b) = aI + bA$$

Donc

$$\begin{aligned} P^{-1}M(a,b)P &= P^{-1}(aI + bA)P \\ &= aP^{-1}IP + bP^{-1}AP \\ &= aI + bD \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2\,b & 0 & 0 \\ 0 & a + b & 0 \\ 0 & 0 & a + b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. On a

$$D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$$

Les matrices P et P^{-1} sont inversibles. Donc si $M(a,b)$ est inversible, $D(a,b)$ apparaît comme le produit de trois matrices inversibles : c'est une matrice inversible.

On peut également écrire

$$M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$$

De la même façon si $D(a,b)$ est inversible, $M(a,b)$ est inversible.

Donc $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.

Or $D(a,b)$ est inversible si et seulement si elle ne contient aucun élément diagonal nul.

On a donc

$$a + 2b \neq 0$$
$$a + b \neq 0$$

7. On a

$$\begin{aligned} M(a,b)^2 &= M(a,b)M(a,b) \\ &= PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} \\ &= PD(a,b)ID(a,b)P^{-1} \end{aligned}$$

$$= PD(a,b)^2P^{-1}$$

Si $D(a,b)^2 = I$, on a

$$M(a,b)^2 = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

On a également

$$D(a,b)^2 = P^{-1}M(a,b)^2P$$

Donc si $M(a,b)^2 = I$, on a

$$D(a,b)^2 = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$$

On a donc

$$M(a,b)^2 = I \Leftrightarrow D(a,b)^2 = I$$

On a donc

$$M(a,b)^2 = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2\,b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} (a+2\,b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à la réunion des quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = -1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

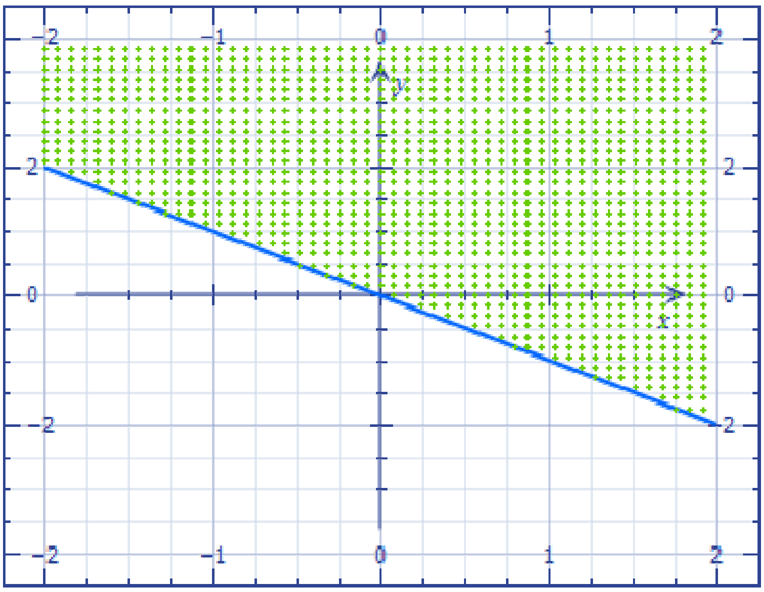
On a

$$g(x,y) = 1 + \ln(x+y)$$

Recherche d'extremum éventuel de la fonction g

1. La fonction g est définie pour tous les couples (x,y) tels que $x+y>0$.

Ce qui donne



2. On a
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x+y}$$
Ces quantités ne s'annulent jamais, donc la fonction g n'admet pas de points critiques et a fortiori pas d'extremum.

Etude de la fonction$\boldsymbol{f_1}$

On a
$$f_1(x)=g(x,1)=1+\ln(x+1)$$

1. On a évidemment
$$D_{f_1}=]-1,+\infty[$$
2. Utilisons par exemple la formule de Taylor.
   On a
$$f_1(0)=1$$
$$f_1'(x)=\frac{1}{x+1}\ \text{ donc } f_1'(0)=1$$
$$f_1''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\ \text{ donc } f_1''(0)=-1$$
   On a donc
$$f_1(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$
3. On en déduit que la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation
$$y=x+1$$
   On a
$$f_1(x)-(x+1)=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$
   Localement, cette quantité est négative, donc la courbe est au-dessous de sa tangente en 0.
4. On a
$$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=+\infty$$
   On a également
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$
   Cela signifie que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.

Etude d'une suite $\boldsymbol{(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}^*}}$

On a
$$f_p(x)=g(x,p)=1+\ln(x+p)$$

1. On a
$$f_p(x)=x\Leftrightarrow x-f_p(x)=0$$
$$\Leftrightarrow h_p(x)=0$$
   La fonction h_p est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
   On a
$$h_p'(x)=1-\frac{1}{x+p}=\frac{x+p-1}{x+p}$$
   Pour $p\geq 1$ et $x>0$, cette quantité est strictement positive.
   La fonction h_p est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

On a

$$h_p(0) = -1 - \ln(p) < 0 \quad \text{car } p \geq 1$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 - \ln(x+p) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+p)}{x}\right)$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+p)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} h_p(x) = +\infty$$

La fonction h_p est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-1-\ln(p),+\infty[$.

$0 \in]-1-\ln(p),+\infty[$, donc l'équation $h_p(x) = 0$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$.

Soit α_p cette solution. On a

$$h_p(\alpha_p) = 0 \Leftrightarrow f_p(\alpha_p) = \alpha_p$$

2. On a

$$f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1}$$

Donc

$$1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) = \alpha_{p+1}$$

On a

$$\begin{aligned} h_p(\alpha_{p+1}) &= \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) \\ &= 1 + \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) \\ &= \ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p) \end{aligned}$$

On a

$$\alpha_{p+1} + p + 1 > \alpha_{p+1} + p$$

La fonction ln étant croissante, on a donc

$$\ln(\alpha_{p+1} + p + 1) - \ln(\alpha_{p+1} + p) > 0$$

Et donc

$$h_p(\alpha_{p+1}) > 0$$

On a donc

$$h_p(\alpha_{p+1}) > h_p(\alpha_p)$$

La fonction h_p étant strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit que

$$\alpha_{p+1} > \alpha_p$$

La suite (α_p) est donc strictement croissante.

3. On a

$$\begin{aligned} h_p(1+\ln(p)) &= 1 + \ln(p) - 1 - \ln(1 + ln(p) + p) \\ &= \ln(p) - \ln(1 + p + ln(p)) \end{aligned}$$

On a

$$\ln(p) \leq 1 + p + \ln(p)$$

Donc

$$\ln(p) - \ln(1 + p + ln(p)) \leq 0$$

Donc

$$h_p(1+\ln(p)) \leq 0$$

Donc

$$h_p(1+\ln(p)) \leq h_p(\alpha_p)$$

Par croissance de la fonction h_p, on a

$$1 + \ln(p) \leq \alpha_p$$

On a

$$\lim_{p \to +\infty} 1 + \ln(p) = +\infty$$

Donc par les théorèmes de comparaison, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \alpha_p = +\infty$$

Valeur approchée de α_1

On a par énoncé

$$1 \leq \alpha_1 \leq 3$$

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$.

1. On a $u_0 = 1$.
   Pour un entier n quelconque supérieur ou égal à 0, montrons que si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq 1$.
   On a
   $$f_1(1) = 1 + \ln(2) \geq 1$$
   La fonction f_1 étant croissante sur$]0, +\infty[$ comme composée de fonctions croissantes, on en déduit que si l'on a
   $$u_n \geq 1$$
   Alors
   $$f(u_n) \geq f(1)$$
   Et donc
   $$u_{n+1} \geq 1$$
   La propriété est donc héréditaire.
   Donc
   $$\forall n \geq 0, u_n \geq 1$$
2. On a
   $$f_1''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$
   La fonction f_1' est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a
   $$f_1'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_1'(x) = 0$$
   Donc $\forall x \in [1, +\infty[$
   $$0 \leq f_1'(x) \leq \frac{1}{2}$$
   Et donc
   $$\forall x \in [1, +\infty[, |f_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
   Sur l'intervalle [1 ;+∞[, la fonction f_1 est continue et dérivable, de plus
   $$\forall x \in [1, +\infty[, |f_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
   Donc d'après l'inégalité des accroissements finis en valeur absolue, on a :
   $$\forall a \in [1, +\infty[, \forall b \in [1, +\infty[, |f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, +\infty[$, et par énoncé, $\alpha_1 \in [1, +\infty[$, donc
   $$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$
   Ce qui donne

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$

On a

$$1 \leq \alpha_1 \leq 3$$

Donc

$$1 - u_0 \leq \alpha_1 - u_0 \leq 3 - u_0$$

Donc

$$0 \leq \alpha_1 - u_0 \leq 2$$

Donc

$$|u_0 - \alpha_1| \leq 2$$

Or

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

On a bien

$$|u_0 - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, montrons que si $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alors $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

On a

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Il y a hérédité et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

3. Pour avoir $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$, il suffit d'avoir

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$$

Donc

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4\ln(10)$$

Donc

$$n - 1 \geq -\frac{4\ln(10)}{\ln(2)}$$

Et donc

$$n \geq 1 - \frac{4\ln(10)}{\ln(2)}$$

Il suffit donc de prendre

$$n_0 = ent\left(1 - \frac{4\ln(10)}{\ln(2)}\right) + 1$$

Où « ent » désigne la fonction partie entière.
Alors

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$$

4. Voici le programme en Pascal

```
Program ecricome2008 ;
Var u :real ;
    n,k : integer ;
Begin
```

```
        u :=1 ;n :=0 ;
        Repeat
                u:=1+ln(1+u) ;n :=n+1
        Until (1/2)^n <0.0001 ;
        Writeln(u) ;writeln(n)
    End.
```

Exercice 3

Premier jeu

1. Nous sommes dans la situation standard d'une loi binomiale (expérience de Bernoulli répétée dans les mêmes conditions un nombre de fois fixé à l'avance, la variable X_N mesurant le nombre de succès). Donc
$$N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{10}\right)$$
On a
$$E(X_N) = \frac{N}{10}$$
$$V(X_N) = \frac{9N}{100}$$
2. X_N représentant le nombre de parties gagnées sur N parties jouées, le nombre de parties perdues est égal à $N - X_N$.
On a
$$Y_N = 3X_N - 1(N - X_N) = 4X_N - N$$
On a donc
$$E(Y_N) = 4E(X_N) - N = \frac{4N}{10} - N = -\frac{6N}{10} = -\frac{3N}{5}$$
3. a. On sait que le paramètre λ de la loi de Poisson est égal à l'espérance mathématique, donc
$$\lambda = \frac{60}{10} = 6$$
b. Soit Z une variable aléatoire telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$. On a
$$P(Z = k) = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$$
On admet que $X_{60} = Z$.
On aura
$$\begin{aligned} P(Y_{60} \geq -50) &= P(4X_{60} - 60 \geq -50) \\ &= P(4X_{60} \geq 10) \\ &= P\left(X_{60} \geq \frac{5}{2}\right) \\ &= P(X_{60} \geq 3) \\ &= 1 - P(X_{60} < 3) \\ &= 1 - 0.1512 \\ &= 0.8488 \end{aligned}$$

Deuxième jeu

1. On a $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0,1] \end{cases}$.
La fonction f est évidemment positive, continue sauf en 1. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1$$

Il s'agit bien d'une densité de probabilité.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Si $x \leq 0$, on a

$$F_{X_i}(x) = 0$$

Si $0 \leq x \leq 1$,

$$F_{X_i}(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

Si $x \geq 1$, on a :

$$F_{X_i}(x) = \int_0^1 f(t)dt = 1$$

2. On a sous réserve de convergence :

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Or compte tenu des valeurs de f, on a :

$$E(X_i) = \int_0^1 2t^2dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

3. On a

$$[M > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap [X_3 > t]$$

4. On a donc

$$P(M > t) = P(X_1 > t \cap X_2 > t \cap X_3 > t)$$

Par indépendance, on a donc :

$$P(M > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)P(X_3 > t)$$

Donc

$$1 - P(M \leq t) = \big(1 - P(X_1 \leq t)\big)\big(1 - P(X_2 \leq t)\big)\big(1 - P(X_3 \leq t)\big)$$

Les trois variables suivent la même loi, on a donc

$$1 - P(M \leq t) = \big(1 - P(X_1 \leq t)\big)^3$$

Donc

$$P(M \leq t) = 1 - \big(1 - P(X_1 \leq t)\big)^3$$

Pour $t \leq 0$, on a donc

$$P(M \leq t) = 1 - (1 - 0)^3 = 0$$

Pour $0 \leq t \leq 1$, on a

$$P(M \leq t) = 1 - (1 - t^2)^3$$

Pour $t \geq 1$, on a :

$$P(M \leq t) = 1 - (1 - 1)^3 = 1$$

La fonction de répartition est donc définie par :

$$F_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 - (1 - t^2)^3 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sauf éventuellement en 0 et 1 où elle admet des dérivées à droite et à gauche.

La variable M est donc une variable à densité dont une densité de probabilité est définie par :

$$f_M(t) = \begin{cases} 6\,t\,(1-t^2)^2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. L'évènement G est réalisé si l'évènement $M \le \frac{1}{5}$ est réalisé.
   On a donc
   $$P(G) = P\left(M \le \frac{1}{5}\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^3 = \frac{1801}{15625}$$

Troisième jeu

1. Le nombre de cases que l'on peut atteindre dépend à la fois du nombre de cases possibles (N) et du nombre de boules (n). Il varie entre 1 et le minimum de n et de N.
2. T_1 correspond au cas où l'on a qu'une seule boule. Le nombre de cases non vides est alors égal à 1.
   On a :
   $$P(T_1 = 1) = 1$$
   T_1 est la variable certaine égale à 1.

   T_2 correspond au nombre de cases non vides possibles avec deux boules. On a
   $$T_2(\Omega) = \{1,2\}$$
   L'évènement $(T_1 = 1)$ est réalisé si les deux boules tombent dans la même case.
   L'univers des possibles associé à cette expérience est l'ensemble des couples d'entiers dont les deux éléments sont dans $[\![1, N]\!]$. Il contient N^2 termes.
   Les cas favorables à la réalisation de $(T_2 = 1)$ sont les couples dont le premier élément est quelconque et le deuxième élément identique au premier. On a N choix pour le premier, 1 choix pour le second. On a donc
   $$card(T_2 = 1) = N \times 1 = N$$
   Donc
   $$P(T_2 = 1) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$$
   De la même façon pour $(T = 2)$ on a N choix pour la première case et $(N-1)$ pour la seconde.
   On a donc
   $$card(T_2 = 2) = N \times (N-1)$$
   Et donc
   $$P(T_2 = 2) = \frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{N-1}{N}$$
3. L'évènement $(T_n = 1)$ est réalisé si les n boules tombent dans une seule case.
   L'univers des possibles pour cette expérience aléatoire est l'ensemble des $n-$uplets d'entiers compris entre 1 et N : il contient donc N^n éléments.
   Les $n-$uplets réalisant l'évènement $(T_n = 1)$ sont composés d'un même entier : il y en a N.
   On a donc
   $$P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}$$

   L'évènement $(T_n = 2)$ est réalisé si toutes les boules vont dans deux cases. Il y a $\binom{N}{2}$ façons de choisir ces deux cases. Chaque $n-$uplet est une application de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ dans l'ensemble formé par deux éléments choisis. Il y a 2^n applications de ce type. Mais deux applications sont à éliminer : celles qui font correspondre aux n éléments la même valeur. Il y a donc $2^n - 2$ applications donnant les deux éléments. On a donc

$$P(T_n = 2) = \frac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n}$$

Si $n > N$, l'évènement $(T_n = n)$ est impossible. On a alors

$$P(T_n = n) = 0$$

Si $n \leq N$, l'évènement $(T_n = n)$ signifie que chaque boule est dans une case différente. Il y a $\binom{N}{n}$ façons de choisir ces n cases parmi les N possibles et $n!$ façons de ranger les n boules dans les n cases choisies. On a donc

$$P(T_n = n) = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n}$$

On aurait pu raisonner autrement en considérant les n cases choisies comme un arrangement de n valeurs prises parmi N. Il y a A_N^n arrangements de ce type.
Or

$$A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!} \quad \text{et} \quad \binom{N}{n} n! = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} n! = \frac{N!}{(N-n)!}$$

4. On peut écrire pour tout k, $1 \leq k \leq n$:

$$(T_{n+1} = k) = \bigcup_{i=1}^{n} (T_{n+1} = k \cap T_n = i)$$

Or l'évènement $(T_{n+1} = k)$ est réalisé si après $(n+1)$ lancers on a rempli k cases. Ce qui signifie qu'avant le $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer il y avait soit $(k-1)$ cases remplies et donc la boule va tomber dans une nouvelle case, soit k cases déjà remplies et la boule tombe dans une case déjà remplie.
On a donc pout tout $i \neq k$ ou $i \neq k-1$, $(T_{n+1} = k \cap T_n = i) = \emptyset$.
On a donc

$$(T_{n+1} = k) = (T_{n+1} = k \cap T_n = k) \cup (T_{n+1} = k \cap T_n = k-1)$$

D'après le théorème des probabilités totales, on a :

$$P(T_{n+1} = k) = P_{T_n = k}(T_{n+1} = k) P(T_n = k) + P_{T_n = k-1}(T_{n+1} = k) P(T_n = k-1)$$

Si l'on a rempli k cases lors des n premiers lancers, la probabilité que la boule tombe dans une de ces k cases est égale au nombre de cas favorables (k) sur le nombre de cas possibles (N). On a donc

$$P_{T_n = k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$$

De même si l'on a rempli $(k-1)$ cases lors des n premiers lancers, la probabilité de remplir une case de plus est celle de l'évènement de tomber dans une des cases vides :il y en a $N - (k-1) = N - k + 1$.
P
On a donc

$$P_{T_n = k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{(N - k + 1)}{N}$$

On en déduit que :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} P(T_n = k-1)$$

5. Soit la fonction G_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)x^k$$

a. On a

$$G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$$

b. On a

$$G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1}$$

On a

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = E(T_n)$$

c. La formule proposée à la question 4 n'est valable que pour $1 \leq k \leq n+1$
Prouvons d'abord que l'on peut aussi l'utiliser pour $k = n+1$.
On doit donc montrer que

$$P(T_{n+1} = n+1) = \frac{n+1}{N} P(T_n = n+1) + \frac{N-(n+1)+1}{N} P(T_n = n)$$

Or comme $n+1 > n$

$$P(T_n = n+1) = 0$$

Il faut donc prouver que

$$P(T_{n+1} = n+1) = \frac{N-n}{N} P(T_n = n)$$

Si $n > N$, on a évidemment $n+1 > N$ et donc d'après la question 3 :

$$P(T_{n+1} = n+1) = P(T_n = n) = 0$$

On a donc bien

$$P(T_{n+1} = n+1) = \frac{N-n}{N} P(T_n = n)$$

Si $n = N$, on a $n+1 > N$ et donc $P(T_{n+1} = n+1) = 0$
Or

$$\frac{N-n}{N} P(T_n = n) = \frac{N-N}{N} P(T_n = N) = 0$$

La formule est encore vérifiée.
Enfin, si $n < N$, on a $n+1 \leq N$. On a donc d'après la question 3 :

$$P(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!\,N^n}$$

Et

$$P(T_{n+1} = n+1) = \frac{N!}{\big(N-(n+1)\big)!\,N^{n+1}} = \frac{N!}{(N-n-1)!\,N^{n+1}}$$

Or

$$\frac{N-n}{N} P(T_n = n) = \frac{N-n}{N} \frac{N!}{(N-n)!\,N^n} = \frac{N!}{(N-n-1)!\,N^{n+1}}$$

On a donc bien

$$P(T_{n+1} = n+1) = \frac{N-n}{N} P(T_n = n)$$

On peut donc étendre la formule de la question 4 à toute valeur k comprise entre 1 et $n+1$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1} = k)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}P(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{N}P(T_n = k)x^k + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)x^k
\end{aligned}$$

Car $P(T_n = n+1) = P(T_n = 0) = 0$
On a donc

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{N-k}{N}P(T_n = k)x^{k+1} \\
&= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + x\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)x^k - \frac{x^2}{N}\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} \\
&= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x) \\
&= \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)
\end{aligned}$$

d. Ce qui donne en dérivant

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$$

En prenant $x = 1$, on a :

$$G_{n+1}'(1) = -\frac{1}{N}G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1)$$

Donc

$$E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n)$$

On obtient donc

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$$

e. La suite $(E(T_n))$ est une suite arithmético géométrique.
L'équation

$$x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1$$

a pour solution

$$x = N$$

On démontre alors que la suite (v_n) définie par

$$v_n = E(T_n) - N$$

est une suite géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_1 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

Or

$$v_1 = E(T_1) - N = 1 - N$$

Donc

$$v_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= (1 - N)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} + N \\
&= N\left(\frac{1 - N}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} + 1\right) \\
&= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n}\right)
\end{aligned}$$