ECRICOME 1993

EXERCICE1

Soit x un réel strictement positif.
On pose pour tout entier naturel n:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+x+1}.$$

On se propose d'étudier la limite $S(x)$ de la somme $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Pour tout entier naturel p, on pose $f_p(x) = \begin{cases} \frac{t^{x+p}}{1+t} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$ et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)dt$.

   Montrer que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $I_p(x)$ existe.

2. Montrer que, pour tout réel t élément de $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

3. Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{où} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt.$$

4. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel n :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}.$$

5. Conclure que l'on a

$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

6. Etude du cas particulier où $x = \frac{1}{2}$.

a) En utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$, calculer $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

   (On admettra que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$).

b) En déduire que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 2

Les produits référencés X, Y, Z se partagent un marché. On note x_n, y_n, z_n les proportions de consommateurs utilisant respectivement les produits X, Y, Z au $n^{ième}$ mois, où n est un entier naturel.

On observe les données suivantes : $x_0 = 0{,}1, \quad y_0 = 0{,}2, \quad z_0 = 0{,}7$.
Par ailleurs les sondages mensuels ont permis de déterminer les intentions des consommateurs, supposées constantes :
→ Utilisant le produit X un mois donné, respectivement $40\ \%,\ 30\ \%,\ 30\ \%$ des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits X, Y, Z le mois suivant.
→ Utilisant le produit Y un mois donné, respectivement $30\ \%,\ 40\ \%,\ 30\ \%$ des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits X, Y, Z le mois suivant.
→ Utilisant le produit Z un mois donné, respectivement $20\ \%,\ 10\ \%,\ 70\ \%$ des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits X, Y, Z le mois suivant.

1. Exprimer $x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1}$ en fonction de $x_n,\ y_n,\ z_n$.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $\quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que l'on a, pour tout entier n, l'égalité matricielle : $U_{n+1} = AU_n + B$.
3. Déterminer la matrice C telle que $C = AC + B$.
4. On considère la matrice $V_n = U_n - C$; démontrer, pour tout entier n, que $V_n = A^n V_0$.
5. a. Calculer les valeurs propres de la matrice A.
   b. Trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   c. En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'expression de la matrice A^n.
6. En déduire les valeurs x_n, y_n en fonction de n.
7. Calculer z_n en fonction de n.
8. Quelles sont à long terme les proportions des consommateurs utilisant respectivement les produits X, Y, Z ?

PROBLEME

Les deux parties sont indépendantes

Première partie

La société ALFDIS étudie à la fin de chaque mois le coût mensuel de gestion de l'article A, lié au nombre n de centaines d'articles A en stock au début du mois (le stock est dit de niveau $100n$) et au nombre k de centaines d'articles A demandés pendant ce même mois.
La demande mensuelle de cet article A est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 (en centaines d'articles).
La société estime qu'un article A restant en stock à la fin du mois coûte à l'entreprise 300 francs alors qu'un article A manquant lui coûte 500 francs.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $p_n = P(X„n)$.
   a. Exprimer, pour n non nul, p_n et $\sum_{k=0}^{n} k.P(X = k)$ en fonction de p_{n-1} et de n.
   b. En utilisant les probabilités p_n, calculer les sommes u_n et v_n suivantes :
   $$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k).$$
2. Montrer que, pour un stock de niveau $100n$ et pour une demande mensuelle de $X = k$ centaines d'articles, le coût $C_n(k)$ de gestion de l'article A s'écrit :
   $$C_n(k) = \begin{cases} 3.10^4.(n-k) & \text{si} \quad 0 \le k \le n \\ 5.10^4(k-n) & \text{si} \quad n < k \end{cases}$$
3. On note C_n la variable aléatoire prenant les valeurs $C_n(k)$.

Calculer, en fonction de n, de p_{n-1} et de p_n, l'espérance mathématique :

$$E(C_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n(k).P(X = k).$$

4. Démontrer la relation : $E(C_{n+1}) - E(C_n) = (8p_n - 5).10^4$.
5. Trouver la valeur de l'entier naturel n solution arrondie par excès de l'équation :
$$E(C_{n+1}) = E(C_n).$$
6. En déduire le sens de variation de la suite de terme général $E(C_n)$.
   Montrer que $E(C_5) > E(C_6)$.
   Conclure quant à l'existence d'un niveau $100n$ du stock d'articles A qui minimise l'espérance $E(C_n)$ du coût de gestion de cet article.

Deuxième partie

La société ALFDIS distribue aussi de l'essence dont la demande est aléatoire. Elle a procédé à une étude des coûts mensuels de gestion de ce produit.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 4.t.e^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$.
   On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

a. Etudier la dérivabilité de f en 0. Conclure pour la courbe $\mathcal{C}$.
b. Construire le tableau de variation de f.
c. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion 1 de $\mathcal{C}$.
d. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2. Pour tout entier naturel p, on pose $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-2t} dt$ et pour $a > 0$, $I_p(a) = \int_0^a t^p e^{-2t} dt$.

a. Calculer $I_0(a)$.
b. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{p+1}(a)$ et $I_p(a)$.
c. En déduire la valeur de $I_1(a)$ et de $I_2(a)$.
d. Prouver que I_p est une intégrale impropre convergente. Calculer I_p en fonction de p.
e. Démontrer que la fonction f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire Y, dont on déterminera la fonction de répartition F.
f. Les statistiques des ventes de la société permettent de considérer dans toute la suite du problème que la variable aléatoire Y représente la demande mensuelle, en millions de litres d'essence.
   Déterminer la valeur du moment d'ordre p de la variable aléatoire Y. En déduire la demande mensuelle en litre que la société ALFDIS peut espérer, et avec quel écart-type (les valeurs seront arrondies au 100 litres près au mieux).

3. Les services de gestion de la société ALFDIS indiquent que pour un niveau s de stock d'essence fixé et réalisé en début de mois (s en millions de litres), le coût de gestion mensuel est une variable g_s dépendant du nombre aléatoire t de millions de litres d'essence demandés, et dont la valeur en millions de francs est :
$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 3.(s - t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq s \\ 2.(t - s) & \text{si} \quad t > s \end{cases}$$
   On admet que l'espérance du coût mensuel est définie par
$$E(g_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) f(t) dt.$$

a. Exprimer $\int_s^{+\infty} t.f(t)dt$ en fonction de $E(Y)$ et de $I_2(s)$ pour $s > 0$.
b. En déduire que l'on a : $E(g_s) = 5s.F(s) + 2E(Y) - 2s - 20I_2(s)$.
c. Déterminer alors l'expression de $E(g_s)$ en fonction de s.

4. On considère la fonction φ définie, pour tout s positif ou nul, par :

$$\varphi(s) = 5.(s+1)e^{-2s} + 3.(s-1).$$

a. Déterminer $\varphi'(s)$ et $\varphi''(s)$.

b. En déduire que l'équation $\varphi'(s) = 0$ admet une unique solution s_0. Donner l'entier naturel q tel que l'on ait :

$$\frac{q}{10^3} < s_0 < \frac{q+1}{10^3}.$$

c. Construire le tableau de variation de la fonction φ.

d. Conclure que l'espérance du coût mensuel $E(g_s)$ admet pour valeur minimale le nombre réel :

$$\frac{6s_0^2}{2s_0+1}$$

Annexe

Table donnant certaines valeurs des probabilités $P(X = n)$ et $p_n = P(X \leq n)$, si X suit une loi de Poisson de paramètre 5

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = n)$	0,0067379	0,0336897	0,0842243	0,1403739	0,1754674	0,1754674	0,1462228	0,1044449
$P(X \leq n)$	0,0067379	0,0404277	0,1246520	0,2650259	0,4404933	0,6159607	0,7621835	0,8666283