CORRECTION DU DEVOIR DE MATHEMATIQUES POUR LE 8 FEVRIER 2008

EXERCICE 1 (ECRICOME 2005)

1.$I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx$:

soit u et v les fonctions définies sur [0, 1] par $u(x) = 1 - x$ ($u'(x) = -1$) et $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

u et v sont bien C^1 sur [0, 1], on peut donc intégrer par parties et :

$I_1 = -\frac{1}{2}\left[(1-x)e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^{-2}) = \frac{1+e^{-2}}{4}$

2. Pour tout n de **N**, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = -\int_0^1 x(1-x)^n e^{-2x}dx$

Or, pour tout n de **N**, pour tout x de [0, 1], $x(1-x)^n e^{-2x} \geq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale, puisque 1 > 0, on peut en déduire que $\int_0^1 x(1-x)^n e^{-2x}dx \geq 0$,

donc que $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite <u>(I_n) est décroissante</u>.

3. Pour tout n de **N**, pour tout x de [0, 1], $(1-x)^n e^{-2x} \geq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale, puisque 1 > 0, on peut en déduire que : <u>$I_n \geq 0$</u>.

4. <u>La suite (I_n) décroissante et minorée par 0 est donc convergente</u>.

5. g est décroissante sur [0, 1], donc pour tout x de [0, 1], $g(x) \leq g(0) = 1$.

6. Pour tout n de **N***, pour tout x de [0, 1],

$0 < e^{-2x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$ puisque $(1-x)^n \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$ par positivité de l'intégrale

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement on peut dire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

8. $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx$:

soit u et v les fonctions définies sur [0, 1] par $u(x) = (1-x)^{n+1}$ ($u'(x) = -(1-x)^n$)

et $v'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$;

u et v sont bien C^1 sur [0, 1], on peut donc intégrer par parties.

$I_{n+1} = -\frac{1}{2}\left[(1-x)^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

D'où : $2 I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n$

9. On a alors : $n I_n = 1 - I_n - 2 I_{n+1}$

et comme $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} I_{n+1}$, on peut en déduire que <u>$\lim_{n\to+\infty} n I_n = 1$.</u>

10. $n(n I_n - 1) = n(-I_n - 2 I_{n+1}) = -n I_n - 2(n+1) I_{n+1} + 2 I_{n+1}$

comme $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n I_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) I_{n+1} = 1$,on peut en déduire que <u>$\lim_{n\to+\infty} n(n I_n - 1) = -3$.</u>

11.Il découle de la question 10, qu'il existe une fonction, notée ε telle que : $n(n I_n - 1) = -3 + \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$

. Soit $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$

EXERCICE 2 (EDHEC 2005)

1)Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel.

En notant $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, on a $\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda b + b' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$.

Par définition de f, on peut écrire : $f(\lambda M + M') = (\lambda M + M') + (\lambda a + a' + \lambda d + d')I$.

On en déduit :

$f(\lambda M + M') = \lambda M + M' + \lambda(a + d)I + (a' + d')I = \lambda\big(M + (a + d)I\big) + \big(M' + (a' + d')I\big)$.

Ceci prouve que : $f(\lambda M + M') = \lambda f(M) + f(M')$. L'application f est donc linéaire.

Comme de plus, $f(M)$ est combinaison linéaire des deux matrices M et I qui sont éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on est sûr que $f(M)$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. f est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2)a)$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $f(J_1) = J_1 + (1+0)I = J_1 + I$.

Comme $I = J_1 + J_4$, on obtient : $f(J_1) = 2J_1 + J_4$

$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $f(J_2) = J_2 + (0+0)I$, d'où : $f(J_2) = J_2$

$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $f(J_3) = J_3 + (0+0)I$, d'où : $f(J_3) = J_3$

$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $f(J_4) = J_4 + (0+1)I = J_4 + I$.

Toujours en remarquant que $I = J_1 + J_4$, on obtient : $f(J_4) = J_1 + 2J_4$

b)Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, la matrice *A* de f dans la base

(J_1, J_2, J_3, J_4) est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) La matrice A est symétrique donc elle est diagonalisable, ce qui prouve que f est également diagonalisable.

3)a) Soit a, b, c et d quatre réels tels que $a(J_1 - J_4) + bJ_2 + cJ_3 + dI = 0$.

En remarquant que $I = J_1 + J_4$, on obtient : $(a+d)J_1 + bJ_2 + cJ_3 + (d-a)J_4 = 0$.

Comme la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est libre, on a : $\begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d - a = 0 \end{cases}$, puis en remplaçant L_4 par $L_4 + L_1$, on a

finalement : $\begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$, ce qui permet de conclure que $a = b = c = d = 0$.

$(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une famille libre de 4 matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et, comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, on peut conclure que : La famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b)Comme f est linéaire, $f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = (2J_1 + J_4) - (J_1 + 2J_4) = J_1 - J_4$.

On sait déjà que $f(J_2) = J_2$ et $f(J_3) = J_3$.

D'autre part, toujours par linéarité de f, on a : $f(I) = f(J_1) + f(J_4) = (2J_1 + J_4) + (J_1 + 2J_4)$, d'où l'on déduit :

$f(I) = 3(J_1 + J_4) = 3I$. La matrice de f dans la base $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est donc : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ et D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$. On sait alors qu'il existe une matrice P inversible qui est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a de plus: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4)a) Comme P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Il suffit donc, pour obtenir P^{-1}, d'exprimer J_1, J_2, J_3 et J_4 en fonction de $K = J_1 - J_4$, J_2, J_3 et $I = J_1 + J_4$.

Ceci donne : $J_1 = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}I$, $J_2 = J_2$, $J_3 = J_3$ et $J_4 = -\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}I$. On a donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) Par récurrence.
Pour n = 0, $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I = A^0$.
Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $A^n = PD^nP^{-1}$, alors, comme $A^{n+1} = A^nA$, on obtient :
$A^{n+1} = PD^nP^{-1}\,PDP^{-1} = PD^n I\, DP^{-1} = PD^n DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

c) $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+3^n)/2 & 0 & 0 & (-1+3^n)/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (-1+3^n)/2 & 0 & 0 & (1+3^n)/2 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 0 & 0 & 3^n-1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3^n-1 & 0 & 0 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

PROBLEME (EDHEC 2005)

1)a) Comme il faut au moins un saut, même si c'est un "saut sur place" pour revenir (ou rester) à l'origine, on a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :
$(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2) \cap \ldots \cap (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 0)$, cette intersection se résumant, dans le cas où k = 1, à : $(T = 1) = (X_1 = 0)$.
b)À l'instant 1, soit le mobile reste à l'origine (probabilité égale à $1-p$), soit il arrive sur le point d'abscisse 1 (avec la probabilité p). On a donc : $P(X_1 = 0) = 1-p$ et $P(X_1 = 1) = p$.
En résumé : X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p

c) On a alors P(T = 1) = 1 − p et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités composées donne :

$P(T = k) = P(X_1 = 1)\, P_{X_1=1}(X_2 = 2) \dots P_{X_1=1\cap\dots\cap X_{k-2}=k-2}(X_{k-1} = k-1)\; P_{X_1=1\cap\dots\cap X_{k-1}=k-1}(X_k = 0)$.

Comme la position du mobile à un instant donné ne dépend que de sa position à l'instant précédent, on peut écrire:

$P(T = k) = P(X_1 = 1)\, P_{X_1=1}(X_2 = 2) \dots P_{X_{k-2}=k-2}(X_{k-1} = k-1)\; P_{X_{k-1}=k-1}(X_k = 0)$.

On sait que $P(X_1 = 1) = p$ et, d'après la règle de déplacement du mobile, chaque saut d'une unité vers la droite est de probabilité p et chaque saut ramenant le mobile à l'origine est de probabilité 1 − p.

En remplaçant, on obtient : $P(T = k) = p^{k-1}(1-p)$ et cette formule reste valable pour k = 1.

En conclusion : $\forall k\in \mathbb{N}^*$, $P(T = k) = p^{k-1}(1-p)$

On reconnaît alors que : T suit la loi géométrique de paramètre 1 − p

2)a) La variable X_0 est la variable certaine égale à 0 donc $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$,

Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, alors, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, si le mobile est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant n + 1, il sera soit à l'origine, soit sur le point d'abscisse k + 1, avec k + 1 qui est élément de {1, 2, …, n + 1}.

On peut résumer tout ceci dans le tableau suivant :

Valeurs de X_n	0	1	...	n − 1	n
Valeurs de X_{n+1}	0 ou 1	0 ou 2	...	0 ou n	0 ou n + 1

Ceci montre bien que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

On a bien montré par récurrence que : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

b) Pour tout entier naturel n non nul, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \le k \le n-1}$ s'écrit : $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0)\, P(X_{n-1} = k)$.

D'après la règle de déplacement du mobile, $P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0) = 1 - p$, d'où :

$P(X_n = 0) = (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)$.

La somme restante est égale à 1 car $(X_{n-1} = k)_{0 \le k \le n-1}$ est un système complet d'événements donc :

$P(X_n = 0) = 1 - p$

3)a) Avec le système complet d'événements $(X_n = i)_{0\le i \le n}$, la formule des probabilités totales s'écrit :

$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)\, P(X_n = i)$.

Comme k est supérieur ou égal à 1, la seule façon d'arriver sur le point d'abscisse k est de venir du point d'abscisse k − 1 (toujours d'après la règle de déplacement du mobile) donc dans la somme ci-dessus, seul le terme $P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)$ est non nul et vaut p. Il reste donc : $P(X_{n+1} = k) = p\, P(X_n = k-1)$

b) On procède par récurrence.

Pour n = 1, k prend la seule valeur 0 (puisque k appartient à $[\![0, n-1]\!]$) et la formule proposée par l'énoncé donne $P(X_1 = 0) = 1 - p$, ce qui est correct d'après la question 1b).

Supposons, pour un entier naturel n fixé dans $\mathbb{N}^*$, que : $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $P(X_n = j) = p^j(1-p)$.

On a alors, en posant j = k − 1 : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k-1) = p^{k-1}(1-p)$.

D'après le résultat de la question 3a), on en déduit que : $\forall k\in [\![1, n]\!]$, $P(X_{n+1} = k) = p\, p^{k-1}(1-p)$, ce qui amène à : $\forall k\in [\![1, n]\!]$, $P(X_{n+1} = k) = p^k(1-p)$.

Cette expression étant encore valable pour k = 0 (grâce au résultat de la question 2b)), on a bien montré que : $\forall k\in [\![0, n]\!]$, $P(X_{n+1} = k) = p^k(1-p)$.

On conclut donc : $\forall n\in \mathbb{N}^*$, $\forall k\in [\![0, n-1]\!]$, $P(X_n = k) = p^k(1-p)$

Pour k = n + 1, la relation de la question 3a) s'écrit : $\forall n\in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = n+1) = p\; P(X_n = n)$.

Ceci montre que la suite de terme général $u_n = P(X_n = n)$ est une suite géométrique de raison p. Comme son premier terme est $P(X_0 = 0) = 1$, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = n) = p^n$

Ce résultat se comprend fort bien car la seule façon d'arriver au point d'abscisse n à l'instant n, c'est de réaliser n sauts vers la droite (chacun ayant pour probabilité p).

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} p^k + p^n$.

Comme $p \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1 - p^n + p^n$.

On peut alors conclure : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$

4) Comme (u = 2) se produit avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, on peut interpréter (u = 2) comme un déplacement d'une unité vers la droite (probabilité $\frac{1}{3}$), alors que (u = 0 ou u = 1) correspond à un retour à l'origine

Dans ce cas, en comprenant que la variable informatique X simule X_1 au premier passage dans la boucle, puis X_2 au deuxième passage, ..., puis X_n en fin de boucle, on peut alors compléter les instructions manquantes :

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
    Readln(n) ;
    Randomize ;
    X : = 0 ;
    For k : = 1 to n do
        begin
            u : = random(3) ;
            if (u = 2) then X : = X + 1
             else X : = 0 ;
        end ;
    Writeln (X) ;
end.
```

5) a) Considérons la fonction f_n, qui à tout x de $[0, 1[$, associe $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

Cette fonction est dérivable sur $[0, 1[$ car c'est une fonction polynomiale.

Pour $n \geq 2$, on a $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$ et $f_n'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2} = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}$.

Comme p appartient à $]0, 1[$, on peut remplacer x par p et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{(1-p)^2}$

(On aurait pu également démontrer cette formule par récurrence).

b) $X_n(\Omega)$ étant fini, X_n possède une espérance et on a : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k)$.

Le terme correspondant à k = 0 est nul, il reste donc : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k)$.

Pour n supérieur ou égal à 2, on peut isoler le terme correspondant à k = n et l'on obtient :

$E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,P(X_n = k) + n\,P(X_n = n)$.

En remplaçant, grâce aux résultats de la question 3b), on a :

$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n = p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} + np^n$.

À l'aide de la question 5a), on trouve alors : $E(X_n) = p(1-p)\dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{(1-p)^2} + np^n$, d'où :

$E(X_n) = p\,\dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{1-p} + np^n$.

En réduisant au même dénominateur, on a : $E(X_n) = \dfrac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n - np^{n+1}}{1-p}$.

Après simplification du numérateur, on obtient : $E(X_n) = \dfrac{p-p^{n+1}}{1-p} = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

Comme $E(X_1) = p$ et $E(X_0) = 0$, cette formule est encore valable pour n = 1 et n = 0, et on peut alors conclure : $\forall n\in \mathbb{N}$, $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$

6)a) $E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1}=k) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1}=k)$. D'après le résultat de la question 3a), on peut écrire :

$E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 pP(X_n = k-1) = p\sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1)$.

Avec le changement d'indice $i = k-1$, on obtient : $E(X_{n+1}^2) = p\sum_{i=0}^{n}(i+1)^2 P(X_n = i)$.

Donc $E(X_{n+1}^2) = p\sum_{i=0}^{n}(i^2+2i+1)P(X_n = i) = p\left(\sum_{i=0}^{n} i^2 P(X_n=i) + 2\sum_{i=0}^{n} i\,P(X_n=i) + \sum_{i=0}^{n} P(X_n=i)\right)$.

$= p\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right)$

b) Comme $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$, alors $u_{n+1} = E(X_{n+1}^2) + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$.

On en déduit que : $u_{n+1} = p\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right) + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$.

Il reste à remplacer $E(X_n)$ par son expression et $E(X_n^2)$ par $u_n - (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$ pour trouver successivement :

$u_{n+1} = p\left(u_n - (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p} + 2\dfrac{p(1-p^n)}{1-p} + 1\right) + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$.

$u_{n+1} = p\,u_n - (2n-1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p} + 2\dfrac{p^2(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$.

$u_{n+1} = p\,u_n + 2\dfrac{p^{n+2}}{1-p} + 2\dfrac{p^2(1-p^n)}{1-p} + p = p\,u_n + 2\dfrac{p^2}{1-p} + p = p\,u_n + \dfrac{p^2+p}{1-p}$.

On a donc bien : $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$

c) La suite (u_n) est arithmético-géométrique. On sait alors qu'en désignant par x le réel solution de $(*)$: $x = px + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$, la suite de terme général $u_n - x$ est géométrique de raison p et de premier terme $u_0 - x$.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n - x = p^n(u_0 - x)$, ce qui s'écrit encore : $u_n = x + p^n(u_0-x)$.

En résolvant l'équation $(*)$, on obtient : $x = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

D'autre part, comme X_0 est la variable certaine égale à 0, la variable X_0^2 est aussi égale à 0 et on a :

$E(X_0^2) = 0$. Comme $u_0 = E(X_0^2) - \frac{p}{1-p}$, on en déduit que $u_0 = -\frac{p}{1-p}$.

On trouve alors : $u_n = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + p^n\left(-\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right) = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - p^n\left(\frac{p}{1-p} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right)$.

Puis, $u_n = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - p^n\left(\frac{p(1-p)+p(1+p)}{(1-p)^2}\right) = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{2p^{n+1}}{(1-p)^2}$.

D'où finalement : $u_n = \frac{p}{(1-p)^2}(1+p-2p^n)$.

On sait que $E(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$, on en déduit donc :

$E(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}(1+p-2p^n) - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n - (2n-1)p^n(1-p)\right)$.

$E(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n - (2n-1)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)$.

On a alors : $E(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)$

On sait que la variance de X_n est donnée par la formule : $V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$.

Il ne reste plus qu'à remplacer :

$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2}$.

$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(1-p^n)^2\right)$.

$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(1-2p^n + p^{2n})\right)$.

$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p + 2p^{n+1} - p^{2n+1}\right)$.

$V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right)$.

Et finalement : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$