DEVOIR DE MATHEMATIQUES POUR LE 7 JANVIER 2008

EXERCICE 1(d'après ESCP)

1) a)Appelons R_A (respectivement R_B, R_C) l'événement « l'étudiant donne la réponse A » (respectivement la réponse B, C) et S l'événement « l'étudiant connaît la bonne réponse ».
S et $\bar{S}$ forment un système complet d'évènements et on peut alors utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer P_A, P_B et P_C :
$P_A = P(R_A) = P_S(R_A)\,P(S) + P_{\bar{S}}(R_A)\,P(\bar{S})$

Or $P_S(R_A) = 1$, $P_{\bar{S}}(R_A) = \frac{1}{3}$, $P(S) = \theta$, $P(\bar{S}) = 1 - \theta$.

Par conséquent, $\underline{P_A = \theta + \frac{1}{3}(1-\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta.}$

De même: $P_B = P(R_B) = P_S(R_B)\,P(S) + P_{\bar{S}}(R_B)\,P(\bar{S})$ avec $P_S(R_B) = 0$ et $P_{\bar{S}}(R_B) = \frac{1}{3}$,

Et alors $\underline{P_B = \frac{1}{3}(1-\theta) = P_C}$ (les réponses B et C jouant le même rôle).

b) La probabilité qu'une personne ayant choisi la réponse A connaisse réellement la signification du sigle URSSAF est égale à $P_{R_A}(S)$; et d'après la formule de Bayes

$$P_{R_A}(S) = \frac{P_S(R_A)P(S)}{P(R_A)} = \frac{\theta}{\frac{1}{3}(1+2\theta)} = \frac{3\theta}{1+2\theta}.$$

2. a)Pour $i \in [|1, n|]$ la variable aléatoire X_i suit une loi binomiale de paramètres 30 et P_A puisque c'est le nombre de succès obtenus au cours de la répétition de 30 épreuves de Bernoulli indépendantes, P_A étant la probabilité du succès.

On a donc : $E(X_i) = 30\,P_A$ et $V(X_i) = 30\,P_A(1 - P_A)$.

Par conséquent, $$E(Z_n) = \frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{30n} = P_A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\theta.$$

Les X_i étant mutuellement indépendantes, $V(Z_n) = \frac{V(X_1)+...+V(X_n)}{(30n)^2} = \frac{P_A(1-P_A)}{30n} = \frac{(1+2\theta)(1-\theta)}{135n}$

b) Z_n et T_n étant des fonctions des X_i, ce sont des estimateurs de θ, mais comme $E(Z_n) \neq \theta$, Z_n n'est pas un estimateur sans biais de θ. Par contre $E(T_n) = \frac{3E(Z_n)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \theta - \frac{1}{2} = \theta$

<u>T_n est donc un estimateur sans biais de θ.</u>
Cet estimateur est alors convergent si $\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$.

Or, $T_n = \frac{3Z_n}{2} - \frac{1}{2}$ implique $V(T_n) = \frac{9}{4}\,V(Z_n) = \frac{(1+2\theta)(1-\theta)}{60n}$

On a bien $\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$: <u>T_n est donc un estimateur sans biais et convergent de θ.</u>

c) D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebytchef,

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{9}{4}\,\frac{P_A(1-P_A)}{30n\varepsilon^2} = \frac{3P_A(1-P_A)}{40n\varepsilon^2}$

On démontre facilement (en étudiant les variations sur [0, 1] de la fonction $P_A \to P_A(1 - P_A)$) que $P_A(1 - P_A) \leq \frac{1}{4}$, donc : $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{3}{160n\varepsilon^2}$.

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$ et donc <u>T_n converge en probabilité vers θ.</u>

3. a)Remarquons que les X_i étant mutuellement indépendantes,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = P((X_1 = x_1) \cap \ldots \cap (X_n = x_n))$$

$$f(p) = \ln(L(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(P(X_k = x_k))$$

Or, pour tout entier k compris entre 0 et 1, la variable aléatoire X_k suit une loi binomiale de paramètres 30 et $P_A = p$.

Donc $P(X_k = x_k) = \binom{30}{x_k} P_A^{\,x_k}(1-P_A)^{30-x_k}$ et $f(p) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\binom{30}{x_k}\right) + \ln p \sum_{k=1}^{n} x_k + \ln(1-p) \sum_{k=1}^{n}(30-x_k)$

f est définie, dérivable sur]0, 1[et

$$f'(p) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(30-x_k) = \frac{(1-p)\sum_{k=1}^{n} x_k - p\sum_{k=1}^{n}(30-x_k)}{p(1-p)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k - 30np}{p(1-p)}$$

$p(1-p)$ étant positif, f ' est du signe de $\sum_{k=1}^{n} x_k - 30np$.

f' (x) est positive pour $p \le \frac{1}{30n}\sum_{k=1}^{n} x_k$: f est alors croissante; f' (x) est négative pour $p \ge \frac{1}{30n}\sum_{k=1}^{n} x_k$: f est alors décroissante.

b) D'après l'étude précédente f passe par un maximum pour $p = \frac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(On dit alors que $Z_n = \frac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p).

EXERCICE II (EML 97)

1) Z est le nombre de succès (« obtenir le 6 » dans la succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/ 6.

Z suit donc une loi binomiale de paramètres N et 1/ 6 :

$\forall k \in [\![0, N]\!]$, $P(Z = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$; $E(Z) = \frac{N}{6}$ et $V(Z) = \frac{5N}{36}$

2) Soit $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$.

• <u>k > n</u> : si on a lancé n fois la pièce on ne peut pas obtenir plus de n fois pile ; donc, dans ce cas <u>$P_{(Z=n)}(X = k) = 0$</u>

• <u>$k \leqslant n$</u> : $P_{(Z=n)}(X = k)$ est la probabilité d'obtenir k succès au cours de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On a : <u>$P_{(Z=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$</u>

3) Soit un couple d'entiers naturels (k, n):

•si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$,

alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = P_{(Z=n)}(X = k) \times P(Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

•si $n > N$, $\{Z = n\}$ est l'événement impossible et comme $(X = k \text{ et } Z = n) \subset (Z = n)$, $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$

•si $k > n$ alors nous avons vu que $P_{(Z=n)}(X = k) = 0$, d'où $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$.

4) Les évènements $\{(Z = n), n \in \mathbf{N}\}$ forment un système complet d'évènements ; on peut donc utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=0 \text{ et } Z=n) = \sum_{n=0}^{N}\binom{n}{0}\binom{N}{n}(1-p)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{1-p}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$$

$$= \left(\frac{1-p}{6}+\frac{5}{6}\right)^N = \left(1-\frac{p}{6}\right)^N$$

5) Pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$:

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{n!\,N!}{k!(n-k)!\,n!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

$$\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} = \frac{N!(N-k)!}{k!(N-k)!(n-k)!(N-k-n+k)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

Par conséquent, $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$

Alors, comme dans la question précédente, pour tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k \text{ et } Z = n) = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{n=k}^{N} \binom{N-k}{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-(n-k)} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{i} \text{ (par changement d'indice)}$$

$$= \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

6)La variable aléatoire X prend toutes les valeurs k de $[\![0, N]\!]$, et $P(X = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$

Par conséquent, X suit une loi binomiale de paramètres $(N, \frac{p}{6})$.

Un raisonnement analogue, q = 1- p jouant le rôle de p,montre que Y suit une loi binomiale de paramètres $(N, \frac{1-p}{6})$

6) Intuitivement, on peut prévoir que X et Y ne sont pas indépendantes ; démontrons le :
P (X = N et Y = 1) = 0 puisque si on a obtenu N « piles » au cours de N lancers, on ne peut pas avoir obtenu de « face ».Et $P(X= N) = \left(\frac{p}{6}\right)^N$ et $P(Y = 1) = N\left(\frac{5+p}{6}\right)^{N-1}\left(\frac{1-p}{6}\right)$.

Donc $P(X = N)\times P(Y = 1) = \left(\frac{p}{6}\right)^N N\left(\frac{5+p}{6}\right)^{N-1}\left(\frac{1-p}{6}\right) \neq 0 = P(X = N \text{ et } Y = 1)$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Déterminons la loi du couple (X, Y) :

•Ce couple prend ses valeurs dans $[\![O, N]\!]\times[\![O, N]\!]$

.• $\forall k \in [\![O, N]\!]$ et $\forall k' \in [\![O, N]\!]$,

* si k + k' > N, P (X = k et Y = k') = 0 car on ne peut avoir plus de N « piles » et « faces ».
*si $0 \leqslant k + k' \leqslant N$, alors :

$$P(X = k \text{ et } Y = k') = P(X = k \text{ et } Z = k + k') = \binom{k+k'}{k}\binom{N}{k+k'} p^k (1-p)^{k'} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-k'}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+k'}$$

(d'après la question 3) avec n = k + k').

7) Z = X + Y, donc V (Z) = V (X + Y) = V (X) + V (Y) + 2 cov (X, Y)

Or $V(Z) = \frac{5N}{36}$, $V(X) = N\frac{p(6-p)}{36}$ et $V(Y) = N\frac{(1-p)(5+p)}{36}$

D'où $\text{cov}(X, Y) = \frac{N}{72}(5 - p(6-p) - (1-p)(5+p)) = \frac{N}{36} p(p-1)$

Remarque : on trouve une covariance négative ; ce qui est normal puisque X et Y varient en sens inverse.

EXERCICE III (ESSEC 2005) : probabilités et analyse

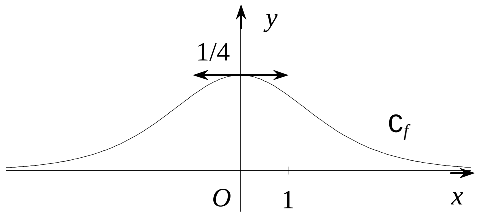
I. Étude d'une fonction : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

$\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{2x}\times e^{-x}}{e^{2x}\times(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=f(x)$, donc f **est paire**.

f est indéfiniment dérivable sur **R** et : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)^2-e^x\times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}=\dfrac{(1-e^x)e^x}{(1+e^x)^3}$.

Sans indétermination : $\lim\limits_{-\infty} f=0$, donc (parité de f) : $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0



a)En posant: $\forall\, x \in \mathbf{R}\quad u(x)=1+e^x$, on a: $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}=-\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x)$,

donc **la fonction** $x\mapsto\dfrac{-1}{1+e^x}$ **est une primitive de f sur R**.

f est continue sur **R**, donc, pour tout réel A, l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx$ existe ;

de plus : $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx=\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^A=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^A}$, donc : $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}$,

ce qui prouve que **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge** et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

D'après **2. b)**, f étant paire, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=1$; de plus, f est continue et à valeurs positives sur **R**, donc **f est une densité de probabilité**.

Soit F la fonction de répartition de X.

$\forall\, x \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{F(x)}=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\left[\frac{-1}{1+e^t}\right]_{-\infty}^{x}=1-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}$.

L'observation du graphe de f invite à conjecturer : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ F(x)+F(-x)=1$. En effet :

$\forall\, x \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{F(x)+F(-x)}=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{e^x\times e^{-x}}{e^x\times(1+e^{-x})}=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1+e^x}{1+e^x}=\mathbf{1}$.

4)Existence et calcul de l'espérance de X

On a : $\dfrac{x^3e^x}{(1+e^x)^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^3e^x}{e^{2x}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^3}{e^x}$.

De plus : $\dfrac{x^3}{e^x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc : $\dfrac{x^3e^x}{(1+e^x)^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui peut s'écrire :

$\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}\Big/\dfrac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On a ainsi prouvé que $\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}$ **est négligeable devant** $\dfrac{1}{x^2}$ **au voisinage de** $+\infty$.

■ La fonction : $x\mapsto x\,f(x)$ est continue, à valeurs positives sur $[0,\ +\infty[$; de plus, elle est négligeable devant la fonction $x\mapsto 1/x^2$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, donc **l'intégrale** $\boldsymbol{\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx}$ **est convergente**.

■ La fonction $x\mapsto x\,f(x)$ étant impaire, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,dx$ est convergente et :

$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

Enfin, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$ étant convergentes et opposées, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 0, ce qui prouve que $\boldsymbol{X}$ **admet une espérance** et : $\mathbf{E(X)=0}$.

II. Calcul d'une variance

1)a) On a : $\dfrac{x^4 \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^4}{\mathrm{e}^x}$ et $\dfrac{x^4}{\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc : $\dfrac{x^4 \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire : $\mathrm{x}^2 \times \mathrm{f(x)} \xrightarrow[\mathrm{x}\to+\infty]{} 0$, ce qui prouve que $x^2 f(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par un raisonnement analogue à celui mené dans **I 4. b)**, on obtient alors que **l'intégrale** $\boldsymbol{\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$ **est convergente**.

b)On démontre, toujours comme à la question **I. 4. b)**, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, ce qui prouve l'existence de $\mathrm{E}(X^2)$. On en déduit que $\boldsymbol{X}$ **admet une variance** et, d'après la formule de Huygens : $\mathbf{V(X)} = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) \underset{\substack{\text{parité de} \\ x\mapsto x^2 f(x)}}{=} \boldsymbol{2\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

2)a) On a, pour tout réel A positif :

$$\int_{0}^{\mathrm{A}} \mathrm{x}^2 \mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx} = \left[-\mathrm{x}^2 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\right]_{0}^{\mathrm{A}} + 2\int_{0}^{\mathrm{A}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx} = \frac{-\mathrm{A}^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} + 2\int_{0}^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx} .$$

De plus, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{x}^2 \mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}$ est convergente et $\dfrac{\mathrm{A}^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 0$ (car $\dfrac{\mathrm{A}^2}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{A}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$ et $\mathrm{A}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} 0$),donc l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\boldsymbol{\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x} .$$

b)On a, pour tout réel A positif :

$$\int_{0}^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{\mathrm{A}} \mathrm{x} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx} = \left[-\mathrm{x}\ln(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})\right]_{0}^{\mathrm{A}} + \int_{0}^{\mathrm{A}} \ln(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})\,\mathrm{dx} = -\mathrm{A}\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}}\right) + \int_{0}^{\mathrm{A}} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\right)\mathrm{dx} ,$$

de plus, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx}$ est convergente et $\mathrm{A}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}}\right) \xrightarrow[\mathrm{x}\to+\infty]{} 0$ (car $\mathrm{A}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}}$ et $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} \xrightarrow[\mathrm{x}\to+\infty]{} 0$), donc l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\right)\mathrm{dx}$ est convergente et $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\right)\mathrm{dx}$.

3)Soit n un entier naturel non nul.

a)La fonction $\boldsymbol{g : x \mapsto \ln(1+x)}$ **est infiniment dérivable sur** $\boldsymbol{]-1,+\infty[}$ comme composée de fonctions infiniment dérivables et les règles de dérivation permettent de montrer par récurrence que **sa dérivée** $\boldsymbol{n}$**-ième est la fonction** $\boldsymbol{x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$.

b)Soit t un réel de $[0,\ 1]$. Pour tout réel x de $[0,\ t]$, $(1+x)^{n+1}$ est minoré par 1, donc : $\left|\mathrm{g}^{(\mathrm{n}+1)}(\mathrm{x})\right| \le \dfrac{\mathrm{n}!}{(1+\mathrm{x})^{\mathrm{n}+1}} \le \mathrm{n}!$.

Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction g entre 0 et t :

$$\left| g(t) - g(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-0)^k}{k!} g^{(k)}(0) \right| \leq n! \frac{|t-0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

c'est-à-dire : $\left| \ln(1+t) - \ln(1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} t^k \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} t^{n+1}$,

ou encore : $\left| \mathbf{\ln(1+t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k}} \right| \leq \mathbf{\frac{t^{n+1}}{n+1}}$.

c)Soit x un réel positif. Alors $1/e^x$ appartient à $[0, 1]$ et on peut remplacer t par $1/e^x$ dans l'inégalité précédente : $\left| \mathbf{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k}} \right| \leq \mathbf{\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}}$.

d)D'après l'inégalité précédente, et en admettant la convergence des intégrales entrant en jeu, on a d'une part : $\int_0^{+\infty} \left| \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} dx$

et d'autre part : $\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) dx - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} \right| dx$.

D'où l'inégalité :

$$\left| \mathbf{\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) dx - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} dx} \right| \leq \mathbf{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} dx}.$$

4)Soit n un entier naturel non nul.

D'une part, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n et pour tout réel A positif :

$$\int_0^A \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[-\frac{e^{-kx}}{k} \right]_0^A = \frac{(-1)^k}{k^2} (e^{-Ax} - 1),$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} dx$ converge et : $\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} e^{-kx}}{k} dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

D'autre part, et par des calculs analogues, on obtient la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} dx$ et sa valeur : $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, on a la majoration : $\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

et le théorème d'encadrement permet d'obtenir l'égalité : $\mathbf{\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}}$.

Enfin, on a les égalités suivantes :

$$\mathbf{V(X)} = 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\ dx = 4\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = 4\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) dx = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \mathbf{\frac{\pi^2}{3}}.$$