Devoir Vacances

Commentaires et corrections

Voici quelques éléments pour vous aider à faire ce devoir et les corrections de quelques erreurs d'énoncé :

I) Exercice 1

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*, u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1. a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$.

Penser au théorème de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. Elle y est donc minorée et majorée (c'est-à-dire bornée).

Soit m et M tels que

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$$

Alors on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ici seul l'un des deux côtés de l'encadrement est utile.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \ln(n)$.

Penser à ajouter les inégalités obtenues et à utiliser la relation de Chasles généralisée.

2. On considère la fonction ϕ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \phi_1(0) = 0 \\ \phi_1(x) = x(1 + \ln(x)) \quad \textit{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Montrer que ϕ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Question classique

3. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x \phi_n(t)\, dt$$

(On rappelle que ϕ_1 a été définie à la question 2).

a. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\phi_n(0)$?

Un rappel important : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, alors l'écriture

$$\int_a^x f(t)dt$$

est celle d'une fonction F:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Cette fonction est $\boxed{\text{la primitive de } f \text{ qui s'annule en } a}$:

On a donc

$$F'(x) = f(x)$$
$$F(a) = 0$$

C'est donc une fonction dérivable et donc aussi continue. Elle est donc aussi intégrable.

b. Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***et*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \phi_n(x) = x^n(a_n + b_n)\ln(x)).$$

On montrera que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$$

Penser à une récurrence.

Attention erreur d'énoncé : il faut lire

$$\phi_n(x) = x^n(a_n + b_n \ln(x))$$

4. Calculer b_n.

On peut écrire :

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} b_n = \frac{1}{n+1} \frac{b_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n} b_{n-1}$$

Et ainsi de suite jusqu'à aboutir à b_1 que l'on connaît.

5. Pour tout n ***élément de*** $\mathbb{N}^*$***, on pose :*** $c_n = n!\ a_n$

a. Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

Penser à une récurrence.

b. En déduire que, pour tout entier n ***supérieur ou égal à 2 :*** $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.

C'est une question difficile.

Penser que l'inégalité à démontrer est équivalente à :

$$-1 - \ln(n) \leq c_n \leq 1 + \ln(n)$$

Démontrer alors chaque inégalité séparément.

c. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Rien à signaler

d. Montrer enfin que la série de terme général a_n ***est absolument convergente.***

Un peu délicat mais c'est la dernière question de l'exercice : il faut essayer de majorer $|a_n|$ par le terme général d'une série convergente et pour cela on peut montrer qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{\ln(n)}{n!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

Partie 2

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 ***définies par :***

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x\ln(x) \text{ et } e_4(x) = x^2\ln(x)$$

On note E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et e_4.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x) = 0.$$

a. L'égalité précédente devant être vérifiée pour tout réel x strictement positif, montrer en choisissant une « bonne valeur » pour x que $a + b = 0$.

Rien à signaler

b. Etablir que :

On considère la fonction $f_1 :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{a}{x\ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d$$

Justifier que $\forall x \in]1, +\infty[, f_1(x) = 0$.

En déduire par un calcul de limite que $d = 0$.

Si une fonction est nulle, ses limites aux bornes de son intervalle de définition le sont aussI.

c. Etablir ensuite que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{a}{x} + b + c\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

En déduire par un raisonnement identique à celui du b) que $b = 0$.

Raisonnement identique

d. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.

Rien à signaler

2. a. Déduire de la question précédente que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.

C'est du cours

b. Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

C'est aussi du cours.

3. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = u(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) = xf'(x).$$

a. Montrer que u est une application linéaire.

Il faut démontrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de E et si λ est un nombre réel, alors

$$u(\lambda f_1 + f_2) = \lambda u(f_1) + u(f_2)$$

Si l'on pose

$$g_1 = u(f_1)\,; \ \ g_2 = u(f_2) \ \ ; \ \ g = u(\lambda f_1 + f_2)$$

on doit montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \lambda g_1(x) + g_2(x)$$

b. Déterminer $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$.

Rien à signaler

c. Soit f une fonction de E s'écrivant pour tout x :

$$f(x) = a_1 e_1(x) + a_2 e_2(x) + a_3 e_3(x) + a_4 e_4(x).$$

Ecrire $g(x)$ en fonction des réels a_1, a_2, a_3, a_4 et de $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ et $e_4(x)$.

C'est le cours sur les applications linéaires.

d. En déduire que u est un endomorphisme de E.

Que faut-il pour qu'une application linéaire soit un endomorphisme ?

4. a. Donner la matrice A de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

Qu'est-ce que la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée ? Comment la construit-on ?

b. Montrer que u est un automorphisme de E.

Quelle propriété de la matrice précédente permet-elle de dire qu'un endomorphisme est un automorphisme ?

II) Exercice 2

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P).

On suppose que X, Y et Z suivent la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$(c'est-à-dire que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \frac{1}{n}$$

1. Déterminer $(X + Y)(\Omega)$.

Rien à signaler

2. a. Justifier que $\forall k \in [\![2, n + 1]\!], (X + Y = k) = \bigcup_{j=2}^{k} (X = j \cap Y = k - j)$

Ici tout d'abord signalons une erreur d'énoncé. Il faut lire

$$(X + Y = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} (X = j \cap Y = k - j)$$

Ecrire tout d'abord

$$(X + Y = k) = \bigcup_{\substack{j \in X(\Omega) \\ k-j \in Y(\Omega)}} (X = j \cap Y = k - j)$$

Ce qui se traduit dans tous les cas par :

$$(X + Y = k) = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k-j \leq n}} (X = j \cap Y = k - j)$$

Montrer alors que $\begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k - j \leq n \\ 2 \leq k \leq n + 1 \end{cases}$ conduit à $1 \leq j \leq k - 1$

b. En déduire que : $\forall k \in [\![2, n + 1]\!], P(X + Y = k) = \dfrac{k - 1}{n^2}$

Il suffit d'utiliser le résultat précédent *c. Montrer que :* $\forall k \in [\![n+2,2n]\!], P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

Reprendre la même démarche que dans les question a) et b).

2. a. On rappelle que si les variables X, Y et Z sont mutuellement indépendantes, alors les variables $(X+Y)$ et Z sont indépendantes.
$\forall k \in [\![2,2n]\!]$, calculer $P(X+Y=k \cap Z=k)$. (On considèrera deux cas différents).

Attention l'évènement $(Z=k)$ n'est pas toujours définissable dans $[\![2,2n]\!]$.

b. Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que :

$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

Rappelons que de façon générale

$$(X=Y) = \bigcup (X=k \cap Y=k)$$

3. a. Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$.

Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $P(T=k)$ pour tout $k \in T(\Omega)$.

b. Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?

On peut vérifier l'indépendance de T avec X (c'est la même chose avec Y) en utilisant l'indépendance de X et de Z et en vérifiant que $\forall i \in X(\Omega), \forall j \in T(\Omega), P(X=i \cap T=j) = P(X=i)P(T=j)$.

c. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X+Y+Z=n+1)$.

T a la même loi que Z et l'évènement $X+Y+Z=n+1$ est identique à l'évènement $X+Y=T$.

III) Exercice 3

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \ln(x) + 2x + 1$$

a. Etudier les variations de g et donner les limites de g en 0 et en $+\infty$.

Sans commentaire

b. En déduire qu'il existe un unique réel α élément de $]0,1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Même chose

2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

a. Déterminer le seul point critique de f, c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.

Rappel : un point critique est un point pour lequel les deux dérivées partielles premières s'annulent.

b. Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.

Pour qu'un point critique soit un minimum ou un maximum relatif, il faut certaines conditions sur les dérivées partielles secondes.

c. Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

m est égal à l'image du point critique par la fonction. Il faudra utiliser le fait que $g(\alpha) = 0$, ce qui permet d'obtenir $\ln(\alpha)$ en fonction de α.

IV) Exercice 4

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0,7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0,1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0,05.

a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

Ces deux questions font appel à des probabilités conditionnelles de base.

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB...)

On note $L_{1\ 1}$ la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

a. Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \ \ P(L_1 = k) = 0{,}3^k \times \ 0{,}7 + 0{,}7^k \times \ 0{,}3$$

Ecrire proprement l'évènement $L_1 = k$ comme une réunion d'intersections d'évènements indépendants, la formule est alors évidente.

b. Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

Il s'agit d'une somme de séries connues

c. Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

Là aussi !

d. Déterminer la loi du couple aléatoire $(L_1 \, , L_2)$.

Rappel : la loi du couple consiste à trouver les probabilités $P(L_1 = i \cap L_2 = j)$.

e. En déduire la loi de L_2.

La loi de L_2 est une loi marginale.

On écrit

$$(L_2 = i) = \bigcup_{j \in L_1(\Omega)} (L_1 = j \cap L_2 = i)$$