DEVOIR DE MATHEMATIQUES POUR LE 7 JANVIER 2008

EXERCICE 1(d'après ESCP)

On cherche à estimer le nombre d'étudiants en France connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela on interroge des étudiants. A chacun on propose 3 définitions différentes A, B et C. La réponse correcte étant A. Soit θ la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la réponse correcte. Tout étudiant connaissant la réponse correcte la donne, sinon il choisi au hasard une des trois réponses proposées.

1. a) Calculer les probabilités P_A, P_B et P_C qu'un étudiant interrogé donne respectivement les réponses A, B ou C. Exprimer θ en fonction de P_A.

b) Quelle est la probabilité qu'une personne ayant choisi la réponse A connaisse réellement la signification du sigle URSSAF ?

2. On veut faire une estimation du paramètre θ. Pour cela on constitue dans la population n groupes de 30 personnes qui seront interrogées par un enquêteur. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on note X_i la variable aléatoire égale aux nombres de réponses A obtenues dans le groupe i. On les suppose mutuellement indépendantes et on note $Z_n = \dfrac{X_1+...+X_n}{30n}$.

a)Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

b) Démontrer que $T_n = \dfrac{3Z_n}{2} - \dfrac{1}{2}$ est un estimateur sans biais de θ.

Cet estimateur est-il convergent ?

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{3}{160n\varepsilon^2}$.

En déduire que T_n converge en probabilité vers θ.

3. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une réalisation de l'échantillon $(X_1, X_2,\dots, X_n)$.

On cherche, dans cette question à estimer $P_A = p$, pour en déduire alors une estimation de θ.

Pour tout p de [0, 1], on définit la vraisemblance au point p par la fonction L telle que :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k).$$

a)$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ étant fixé dans $[\![1, 30]\!]^n$, étudier les variations de la fonction f définiesur [0, 1] par $f(p) = \ln(L(x_1, x_2, \dots, x_n, p))$.

b) Montrer que cette fonction passe par un maximum pour $p = \dfrac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(On dit alors que $Z_n = \dfrac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p).

EXERCICE II (EML 97)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p, réel de]0, 1[.

On pourra noter q = 1 – p. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de " 6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
Y indique le nombre de faces obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z = n)}(X = k)$.

On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n):

•si $0 \le k \le n \le N$ alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$

•si $n > N$ ou $k > n$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \le k \le n \le N$: $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $(N, \frac{p}{6})$.

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7.Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?Déterminer la loi du couple (X, Y).

8.En comparant les variances de Z et de X + Y , déterminer la covariance du couple (X, Y) .

EXERCICE III (ESSEC 2005) : probabilités et analyse

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1)Étudier la parité de f. Déterminer f', dresser le tableau de variations de la fonction f et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2)a)A l'aide d'une simple formule du cours, déterminer une primitive de f sur **R**.

b)Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et préciser sa valeur.

c)En déduire que f est une densité de probabilité.

On considère dans la suite de cet exercice, une variable aléatoire réelle X qui admet pour densité de probabilité la fonction f.

3)Soit F la fonction de répartition de X .

a)Pour tout réel x, expliciter $F(x)$.

b) A l'aide du graphe de f, conjecturer une relation entre $F(-x)$ et $F(x)$, puis la démontrer.

4)Existence et calcul de l'espérance de X

Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{x^3 e^x}{(1+e^x)^2}$ au voisinage de $+\infty$.

En déduire que $\dfrac{x e^x}{(1+e^x)^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Justifier alors la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ puis l'existence de l'espérance de X (que l'on notera $E(X)$). Préciser la valeur de $E(X)$.

II.Calcul d'une variance

L'objectif de cette partie est, après avoir prouvé son existence, de calculer la variance de X, notée $V(X)$.

1)a) En procédant comme dans la question **I. 4.**, établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

b)En déduire l'existence de la variance de X, et préciser la relation entre $V(X)$ et $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

2)a) A l'aide d'une intégration par parties (portant sur des intégrales définies sur un segment), prouver : $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+e^x}\,dx$.

b)En remarquant que l'on a, pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$,

démontrer à l'aide d'une deuxième intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\,dx = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)dx$.

3)Soit n un entier naturel non nul.

a)Justifier que la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est infiniment dérivable sur son ensemble de définition et montrer par récurrence que sa dérivée n-ième est la fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

b)En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, en déduire que, pour tout réel t de $[0\,,1]$, on a :

$$\left| \ln(1+t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

c)Justifier alors que, pour tout réel x positif, on a l'inégalité :

$$\left| \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-kx}}{k} \right| \leq \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

d)En admettant la convergence des intégrales entrant en jeu (convergences qui se démontreraient facilement), prouver l'inégalité :

$$\left| \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-kx}}{k}\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n+1}\mathrm{d}x.$$

4)De la question précédente, déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$,

puis, en admettant l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, donner la valeur de $\mathrm{V}(X)$.